فصل ۲

تعاریف اولیه

این فصل شامل تعاریف و مفاهیم اولیه و مورد نیاز برای آغاز بحث می باشد. سپس با تعاریف مقدماتی آنالیز تابعی و تعریف فضای حاصلضرب داخلی راه را برای ورود به فضای هیلبرت هموار می کنیم. در سراسر این مقاله $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ معرف مجموعهٔ اعداد مختلط و منظور از میدان $\mathbb{K}$، میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می باشد.

۱.۲ فضای توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۲. گیریم X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. خانوادهٔ τ از زیرمجموعه‌های X را یک **توپولوژی** روی X گوئیم، هرگاه:

۱) $\varnothing\ ,\ X \in \tau$

۲) τ تحت اشتراک متناهی بسته است

۳) τ تحت اجتماع دلخواه بسته است

در اینصورت (X,τ) را یک **فضای توپولوژیک** نامند. عناصر τ را **مجموعه‌های باز** گویند. بنابراین $A \subseteq X$ باز است اگر $A \in \tau$. F را **بسته** گوئیم اگر متمم آن یعنی $X - F$ در τ باز باشد. **بستار** مجموعهٔ $A \subset X$ را با $\overline{A}$ یا $Clos(A)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{A} = \bigcap\{F : F \subseteq X, F \supseteq A, \text{بسته است } X \text{ در } F\}$$

۲.۲ فضای متریک و مفاهیم وابسته

تعریف ۱.۲.۲. گیریم X مجموعه‌ای ناتهی باشد، در این صورت هر تابع حقیقی $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را که دارای خواص زیر باشد، یک **متر** روی مجموعهٔ X می‌نامیم،

(آ) $\forall x,y \in X$، $d(x,y) \geq 0$

(ب) $\forall x,y \in X$، $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$

(ج) $\forall x,y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$

د) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ،$\forall x, y, z \in X$

مجموعهٔ X با متر d را یک **فضای متریک** نامیده و با (X,d) نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۲. روی $\mathbb{R}^n$ که دارای اعضائی بصورت n تایی های مرتب است، متر را چنین تعریف می کنیم

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

بوضوح دیده می شود که $(\mathbb{R}^n, d)$ یک فضای متریک بوده و به متریک *معمولی* موسوم است.

تعریف ۳.۲.۲. دنباله (x_n) از فضای متریک (X,d) را **همگرا** گوئیم، هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. x را حد دنباله (x_n) نامیده و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ و یا بصورت خلاصه $x_n \to x$.

تعریف ۴.۲.۲. دنباله (x_n) در فضای متریک (X,d) کراندار است، هرگاه عدد حقیقی M و عنصر $x \in X$ موجود باشند بطوری که بازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_n, x) \leq M$. بعلاوه دنبالهٔ (x_n) از فضای متریک (X,d) را یک **دنبالهٔ کوشی** می‌نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی N وجود داشته باشد که برای هر $m, n \geq N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. فضای متریک (X,d) را **کامل** گوئیم، هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

مثال ۵.۲.۲. برای عدد حقیقی $p \geq 1$ فضای ℓ^p متشکل از مجموعهٔ تمام دنباله هایی بصورت $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ (با $x_i \in \mathbb{K}$) که $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leq \infty$ را در نظر می گیریم، متر روی ℓ^p را بصورت $d(x,y) = (\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ تعریف می کنیم. آنگاه (ℓ^p, d) یک فضای متریک کامل است. برای توضیحات بیشتر ر.ک. [۳] و [۴].

تعریف ۶.۲.۲. زیر مجموعه M از فضای متریک (X,d) را در X **چگال** گوئیم هرگاه $\overline{M} = X$. فضای متریک (X,d) **تفکیک پذیر** است اگر دارای زیر مجموعهٔ چگال شمارا باشد. بنابراین $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است زیرا $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ و از اینکه $\mathbb{Q}$ شمارش پذیر است پس $\mathbb{R}$ تفکیک پذیر می باشد.

۳.۲ فضای برداری

تعریف ۱.۳.۲. یک **فضای برداری** روی میدان $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ متشکل از :

۱. یک مجموعه V از اشیایی به نام بردارها،

۲. قاعده‌ای به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای x و y از V بردار $x+y$ از V را که مجموع x و y نامیده می‌شود، وابسته می‌سازد با این شرط که

آ) جمع جابجائی است، یعنی $x + y = y + x$

ب) جمع شرکت‌پذیر است، یعنی $(x+y)+z = x+(y+z)$

پ) بردار یکتای 0 به نام صفر در V موجود است، بطوری که به‌ازاء هر x در V، $x+0=x$
ت) به‌ازاء هر بردار x در V بردار یکتای $-x$ در V موجود است بطوری که $x+(-x)=0$
۳. قاعده‌ای به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر α از $\mathbb{K}$ و هر بردار x در V بردار αx در V را که حاصلضرب α در x نامیده می‌شود، وابسته سازد با این شرایط که
(آ) به‌ازاء هر x در V، $1.x=x$
(ب) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$
(پ) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
(ت) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
زیرمجموعهٔ W از فضای برداری V را زیرفضای V گوئیم هرگاه W تحت اعمال تعریف شده در V، خود یک فضای برداری باشد.

تعریف ۲.۳.۲. گیریم X یک فضای برداری بر میدان $\mathbb{K}$ باشد. زیر مجموعهٔ S از X را **وابسته خطی** نامیم هرگاه بردارهایی متمایز مانند $x_1, x_2, \cdots, x_n$ در S و اسکالرهایی مانند $r_1, r_2, \cdots, r_n$ که همگی صفر نیستند در $\mathbb{K}$ یافت شود بطوری که

$$r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n=0$$

مجموعه‌ای که وابسته خطی نباشد را **مستقل خطی** نامند. اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$ بردارهایی در X و $c_1, c_2, \cdots, c_n$ اسکالرهایی باشند، بردار

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n$$

را یک **ترکیب خطی** از $x_1, x_2, \cdots, x_n$ نامند. چنانچه $S\subseteq X$ و Y مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی عناصر S باشد، می‌گوئیم Y **پیمای** S است و می نویسیم $Y=Span(S)$. اگر $S\subseteq X$ و $X=Span(S)$ و عناصر S مستقل خطی باشند ، گوئیم S یک **پایه** برای مجموعهٔ X است. در صورتیکه مجموعهٔ S متناهی و شامل n بردار باشد، گوئیم X یک فضای برداری با بعد متناهی است. تعداد اعضای S را **بعد** X می نامیم و با $\dim X=n$ نشان می دهیم.

ملاحظه ۳.۳.۲. *هر فضای برداری با پایهٔ شمارا، تفکیک پذیر است. بعلاوه هر فضای متریک تفکیک پذیر دارای پایهٔ شماراست. بوضوح $\mathbb{R}^n$ همراه با جمع و ضرب اسکالر معمولی یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ است و $\dim\mathbb{R}^n=n$. لذا $\mathbb{R}^n$ تفکیک پذیر است.* می توان دید که فضای ℓ^p با تعریف پایهٔ شمارا بصورت $\{e_1, e_2, ..., e_j, ...\}$ که برای هر j، $e_j=(..., 1, ...)$ در مولفهٔ jام برابر یک است فضائی تفکیک پذیر است ([۴] و [۷]).

۴.۲ نرم و فضاهای نرم دار

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. تابع حقیقی $\|.\|:X\to\mathbb{R}$ را یک **نرم** نامیم هرگاه برای هر $x,y\in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم:
(آ) $\|x\|\geq 0$

(ب) $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$
(ج) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\, \|x\|$
(د) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
اگر فضای برداری X دارای نرم $\|\cdot\|$ باشد، آنگاه گوئیم X یک فضای نرم داراست و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نشان می‌دهیم.

اگر X یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$، قرار دهیم $d(x,y) = \|x-y\|$، آنگاه بسادگی دیده می‌شود که d یک متر روی X است و بنابراین هر فضای نرم دار یک فضای متریک است. d را **متر تولید شده بوسیلهٔ نرم** $\|\cdot\|$ می‌نامیم. همچنین نرم $\|\cdot\|$ تابعی پیوسته بر X است. این مطلب بسادگی و با بکاربردن تعریف پیوستگی و اینکه

$$\Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \leq \|x-y\|$$

ثابت می‌شود.

مثال ۲.۴.۲. فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|x\| = (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ که $x = (x_۱, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک فضای نرمدار است. همچنین روی فضای ℓ^p معرفی شده در مثال ۵.۲.۲، می توان نرم را بصورت

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{۱}{p}}$$

تعریف کرد، که در آن دنبالهٔ $x = (x_i)_{i=۱}^{\infty}$ در ℓ^p است.

تعریف ۳.۴.۲. فضای نرم دار $(X, \|\cdot\|)$ را **باناخ** گوئیم، هرگاه با متر تولید شده توسط نرم$\|\cdot\|$ کامل باشد. بنابراین $\mathbb{R}^n$ و ℓ^p همراه با نرم های تعریف شده، فضای باناخ هستند.

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنیم A یک زیر مجموعهٔ ناتهی از فضای متریک (X, d) باشد. **قطر مجموعهٔ** A را با $diam\ A$ نشان داده و بدین صورت تعریف می کنیم

$$diam\ A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

A در X کراندار است اگر و تنها اگر عدد حقیقی M وجود داشته باشد بطوری که $diam\ A \leq M$.

تعریف ۵.۴.۲. منظور از یک پوشش باز برای مجموعهٔ S در فضای متریک X، یعنی گردآیه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X مانند $\{G_\alpha\}$ بطوری که $S \subset \bigcup G_\alpha$. زیر مجموعهٔ S از فضای متری X را **فشرده** گوئیم هرگاه هر پوشش باز S دارای زیر پوشش متناهی باشد.

تعریف ۶.۴.۲. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک **مجموعهٔ محدب** در X، زیر مجموعهٔ ناتهی S از X است که برای هر $x, y \in S$ و هر عدد حقیقی $۰ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم

$$tx + (۱-t)y \in S$$

بوضوح زیرفضای یک فضای برداری مجموعه‌ای محدب است. زیرمجموعهٔ S از X را **گوه** نامیم اگر S یک مجموعهٔ ناتهی و محدب باشد بقسمی که برای هر $t \geq ۰$، $tS \subseteq S$. یک گوه را **مخروط** گوئیم هرگاه $S \cap (-S) = \{۰\}$.

۵.۲ اندازه

در این بخش تعاریف مختصری در مورد نظریهٔ اندازه که مورد نیاز است را بیان می کنیم. البته خواننده می تواند بحث مبسوط در این زمینه را در [۷] و [۸] ببیند. یادآوری کنیم که مجموعهٔ

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

را اعداد حقیقی توسعه یافته می باشد و تابع حقیقی توسعه یافته، تابعی است با برد در $\mathbb{R}^*$.

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{B}_X$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد. $\mathcal{B}_X$ را یک σ-جبر گوئیم هرگاه

۱) $\varnothing\ ,\ X \in \mathcal{B}_X$

۲) $E \in \mathcal{B}_X \Rightarrow E^c = X - E \in \mathcal{B}_X$

۳) برای $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر $\mathcal{B}_X$ داشته باشیم $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}_X$

زوج $(X, \mathcal{B}_X)$ متشکل از یک مجموعهٔ X و یک $\sigma-$جبر $\mathcal{B}_X$ را **فضای اندازه‌پذیر** نامند. عضو E از $\mathcal{B}_X$ را مجموعهٔ *اندازه‌پذیر* گوئیم.

تعریف ۲.۵.۲. منظور از **اندازه** μ روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathcal{B}_X)$ یک تابع حقیقی توسعه یافته μ روی اعضاء $\mathcal{B}_X$ است که برای همهٔ اعضاء $\mathcal{B}_X$ تعریف شده و دارای خواص زیر باشد:

۱) $\mu(\varnothing) = 0$

۲) برای هر $E \in \mathcal{B}_X$، $\mu(E) \geq 0$

۳) μ **جمعی شمارا** باشد، یعنی برای هر دنبالهٔ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضاء دو به دو مجزای $\mathcal{B}_X$ داشته باشیم:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

فضای اندازه پذیر $(X, \mathcal{B}_X)$ و اندازهٔ تعریف شدهٔ μ روی آن را با $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$، نشان داده و آن را **فضای اندازه** می نامیم. اندازهٔ μ را یک اندازهٔ σ- باپایان گوئیم، هرگاه یک دنبالهٔ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر $\mathcal{B}_X$ باشد بگونه‌ای که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و به ازاء هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu(E_n) < \infty$ باشد.

لم ۳.۵.۲. *فرض کنید μ اندازهٔ تعریف شده روی $\sigma-$جبر $\mathcal{B}_X$ باشد. اگر E و F متعلق به $\mathcal{B}_X$ باشند و $E \subseteq F$ آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

برهان. ر.ک [۸]. □

تعریف ۴.۵.۲. فرض کنیم X یک مجموعهٔ دلخواه و $\mathcal{B}_X$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشد. $\mathcal{B}_X$ را یک **جبر** گوئیم هرگاه

۱) $\varnothing\ ,\ X \in \mathcal{B}_X$

۲) $E \in \mathcal{B}_X \Rightarrow E^c \in \mathcal{B}_X$

۳) برای $\{E_n\}_{n=1}^{k}$ از عناصر $\mathcal{B}_X$ داشته باشیم $\bigcup_{n=1}^{k} E_n \in \mathcal{B}_X$

مثال ۲.۵.۵. فرض کنیم $X = \mathbb{N}$ و $\mathcal{B}_X$ یک $\sigma-$جبر متشکل از تمام زیر مجموعه‌های X باشد. برای هر $E \in \mathcal{B}_X$ تعریف می‌کنیم

$$\mu(E) = \begin{cases} |E| & \text{اگر } E \text{ باپایان باشد,} \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که $|E|$ همان کاردینال مجموعهٔ E است. لذا μ یک اندازه است که به آن اندازهٔ شمارشی روی $\mathbb{N}$ گوئیم. بعلاوه این اندازه $\sigma-$ باپایان است.

ملاحظه ۲.۵.۶. *در مجموعهٔ اعداد $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ جبر تولید شده توسط تمام گویهای باز در $\mathbb{K}$ را* **جبر بورل** *گوئیم و آنرا با B نشان می دهیم که جبر تولید شده شامل تمام گویهای بسته نیز خواهد بود. هر عضو B را* **مجموعهٔ بورل** *گوئیم. جبر بورل روی $\mathbb{R}$ شامل تمام مجموعه‌های نیم باز نیز خواهد بود.*